PART3 双曲線

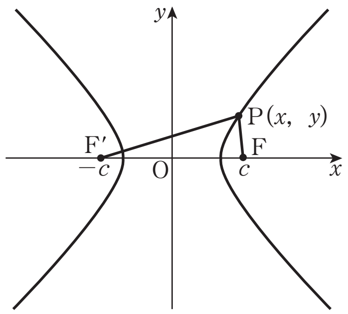
要点整理と公式

要点 ① 双曲線の方程式

「双曲線の定義」…2 定点 F，F′ からの距離の差が一定である点の軌跡。

2 点 F，F′ を「　　　」という。

2 点 F$(c,\ 0)$，F′$(-c,\ 0)$ を焦点とし，2 点からの距離の差が $2a$ である双曲線の方程式について（ただし，$c>a>0$ とする）



すなわち

$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a$

楕円の場合と同様に変形すると

$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$

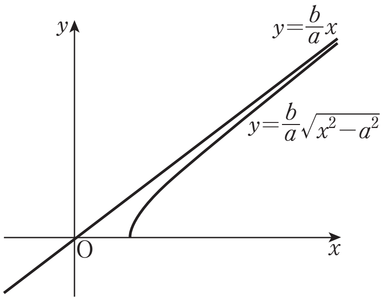
$c>a>0$ であるから，$\sqrt{c^2-a^2}=b\ (>0)$ とおくと　$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$

よって $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（標準形）　また $c=\sqrt{a^2+b^2}$

2 点 F，F′ を焦点とする双曲線において，線分 FF′ の中点を双曲線の「　　　」という。
また，直線 FF′ を「主軸」，主軸と双曲線の 2 つの交点を「　　　」という。

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ では，頂点は $(a,\ 0)$，$(-a,\ 0)$ である。

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ より，$x>0$，$y>0$（第 1 象限）のとき $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}<\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2}=\dfrac{b}{a}x$



$y=\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ のグラフは，直線 $y=\dfrac{b}{a}x$ に限りなく近づいていく，つまり直線 $y=\dfrac{b}{a}x$ が「　　　」であることがわかる。同様に考えると，双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の漸近線は，直線 $y=\dfrac{b}{a}x$ と直線 $y=-\dfrac{b}{a}x$ であることがわかる。

双曲線の方程式

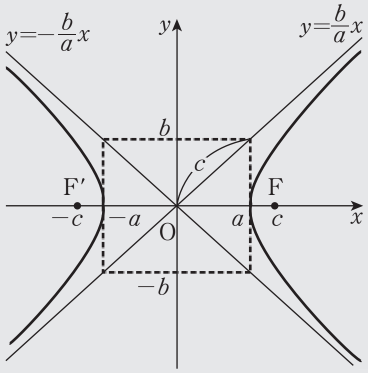
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$

・焦点は $\mathrm{F}(c,\ 0)$，$\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c=\sqrt{a^2+b^2})$

・中心は原点　　頂点は $(a,\ 0)$，$(-a,\ 0)$

・漸近線は $y=\dfrac{b}{a}x$，$y=-\dfrac{b}{a}x$

・双曲線は x 軸，y 軸，原点(中心)に関して対称



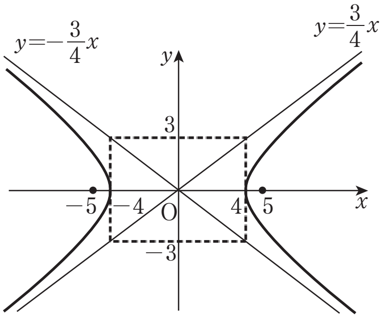
(ex) 双曲線 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1 \iff \dfrac{x^2}{4^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=1$

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+9}=5$ より

焦点は (　, 0), (　　, 0)　頂点は (　, 0),

(　　, 0)

漸近線は　$y=$　x，$y=$　　x

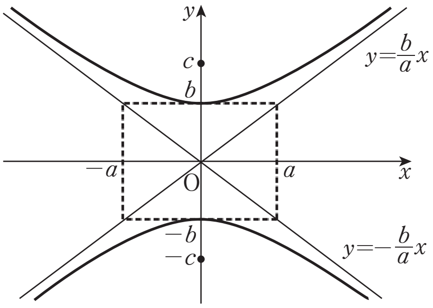


要点② 焦点が y 軸上にある双曲線

$a>0$，$b>0$ のとき，2 点 $\mathrm{F}(0,\ c)$，$\mathrm{F}'(0,\ -c)$ $(c=\sqrt{a^2+b^2})$ を焦点とし，2 点からの距離の差が $2b$ である双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

である。頂点は $(0,\ b)$，$(0,\ -b)$　　漸近線は $y=\dfrac{b}{a}x$，$y=-\dfrac{b}{a}x$



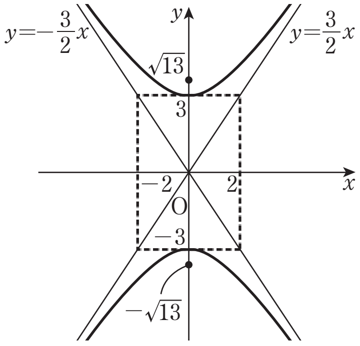
(ex) 双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=-1 \iff \dfrac{x^2}{2^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=-1$

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$ より

焦点は (0,　　), (0,　　　)　頂点は (0,　),

(0,　　)

漸近線は $y=$　x，$y=$　　x



3 (1) 次の双曲線の焦点，漸近線を求め，概形をかけ。

(i) $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$　　(ii) $2x^2-3y^2=-6$

(2) 次の双曲線の方程式を求めよ。

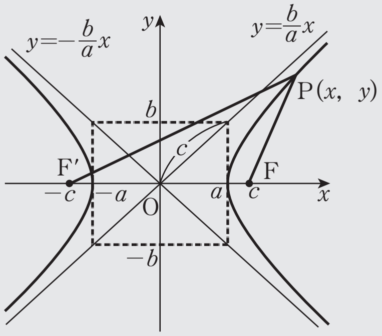
(i) 2 点 (3, 0), (−3, 0) からの距離の差が $2\sqrt{5}$

(ii) 焦点が 2 点 (0, 5), (0, −5) で，漸近線が $y=\pm 2x$

Point Pickup

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ $(a>0,\ b>0)$ のグラフ

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$



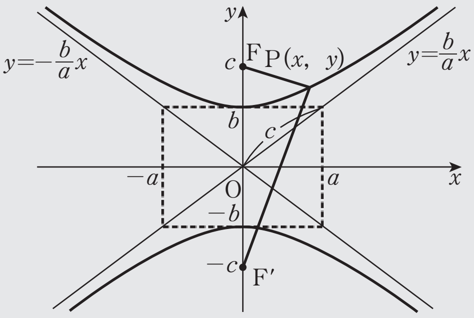
焦点は　$(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)$

$c=$

漸近線は $y=\dfrac{b}{a}x$, $y=-\dfrac{b}{a}x$

「　　　　　　」

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$



焦点は　$(0,\ c)$, $(0,\ -c)$

$c=$

漸近線は $y=\dfrac{b}{a}x$, $y=-\dfrac{b}{a}x$

「　　　　　　」

第 1 講 PART3 確認問題

次の双曲線の焦点，漸近線を求めよ。答えは下の①～④のうちから選べ。

1 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$

焦点 ア

① $(\sqrt{3},\ 0)$，$(-\sqrt{3},\ 0)$　② $(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$

③ $(0,\ \sqrt{3})$，$(0,\ -\sqrt{3})$　④ $(0,\ \sqrt{5})$，$(0,\ -\sqrt{5})$

漸近線 イ

① $y=2x$，$y=-2x$　② $y=\dfrac{1}{2}x$，$y=-\dfrac{1}{2}x$

③ $y=4x$，$y=-4x$　④ $y=\dfrac{1}{4}x$，$y=-\dfrac{1}{4}x$

2 $5x^2-4y^2=-20$

焦点 ウ

① $(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$　② $(0,\ 3)$，$(0,\ -3)$

③ $(9,\ 0)$，$(-9,\ 0)$　④ $(0,\ 9)$，$(0,\ -9)$

漸近線 エ

① $y=\sqrt{5}x$，$y=-\sqrt{5}x$　② $y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$，$y=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$

③ $y=\dfrac{5}{4}x$，$y=-\dfrac{5}{4}x$　④ $y=\dfrac{4}{5}x$，$y=-\dfrac{4}{5}x$

次の双曲線の方程式を求めよ。答えは下の①～④のうちから選べ。

3 2 点 $(4,\ 0)$，$(-4,\ 0)$ からの距離の差が 6 　オ

① $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{2}=1$　　② $\dfrac{x^2}{7}-\dfrac{y^2}{9}=1$

③ $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}=1$　　④ $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{25}=1$

4 焦点が 2 点 $(0,\ 3)$，$(0,\ -3)$ で，漸近線が $y=\pm\sqrt{2}\,x$

カ

① $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{4}=-1$　　② $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{6}=1$

③ $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{6}=-1$　　④ $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=-1$

[MEMO]

PART3 双曲線

3 (1) 次の双曲線の焦点，漸近線を求め，概形をかけ。

(i) $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$　　(ii) $2x^2-3y^2=-6$

(2) 次の双曲線の方程式を求めよ。

(i) 2 点 $(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$ からの距離の差が $2\sqrt{5}$

(ii) 焦点が 2 点 $(0,\ 5)$，$(0,\ -5)$ で，漸近線が $y=\pm 2x$

[解答]

(1)(i) $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ より $\dfrac{x^2}{2^2}-\dfrac{y^2}{1^2}=1$

$\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$ より，焦点は $(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$

漸近線は $y=\dfrac{1}{2}x$，$y=-\dfrac{1}{2}x$

概形は下図(ア)

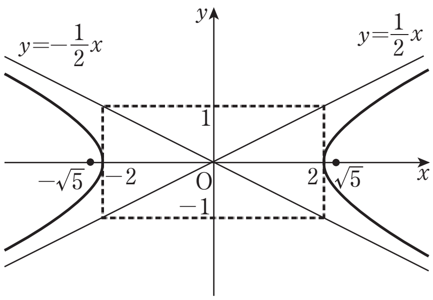
(ii) $2x^2-3y^2=-6$ より $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{2}=-1$　　$\dfrac{x^2}{(\sqrt{3})^2}-\dfrac{y^2}{(\sqrt{2})^2}=-1$

$\sqrt{3+2}=\sqrt{5}$ より 焦点は $(0,\ \sqrt{5})$，$(0,\ -\sqrt{5})$

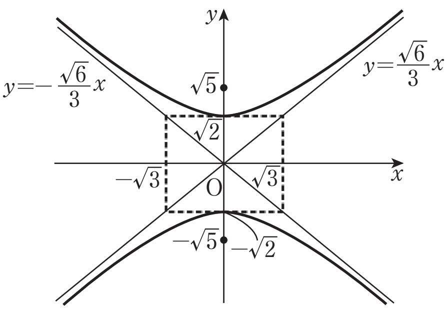
漸近線は $y=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x$，$y=-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x$　つまり $y=\dfrac{\sqrt{6}}{3}x$，$y=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}x$

概形は下図(イ)

(ア)



(イ)



(2)(i)　焦点が x 軸上にあるので，求める方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$，$b>0$)とおける。

焦点からの距離の差が $2\sqrt{5}$ より，$2a=2\sqrt{5}$　　　$a=\sqrt{5}$

焦点の座標が $(3,\ 0)$ より，$\sqrt{a^2+b^2}=3$　　$5+b^2=9$　　$b^2=4$

よって，求める方程式は $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$

(ii)　焦点が y 軸上にあるので，求める方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ ($a>0$，$b>0$)とおける。

焦点の座標が $(0,\ 5)$ より，$\sqrt{a^2+b^2}=5$　　　$a^2+b^2=25$　……①

漸近線が $y=2x$ より，$\dfrac{b}{a}=2$　　$b=2a$　……②

①，②より $a^2+4a^2=25$　　$a^2=5$

このとき①より　$5+b^2=25$　　　$b^2=20$

よって，求める方程式は $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{20}=-1$

第 1 講　PART3 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：②，イ：①

[解説]

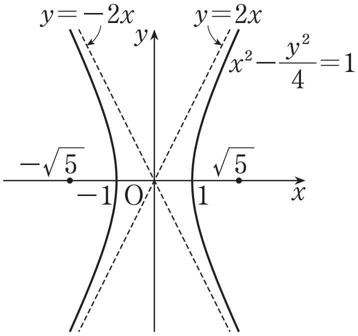
$x^2-\frac{y^2}{4}=1$ より，$\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$

$\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$ より，焦点は，**[A]**

$(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$

漸近線は，$y=\frac{2}{1}x$，$y=-\frac{2}{1}x$

すなわち，$\boldsymbol{y=2x}$，$\boldsymbol{y=-2x}$ **[A]**



[A]　双曲線

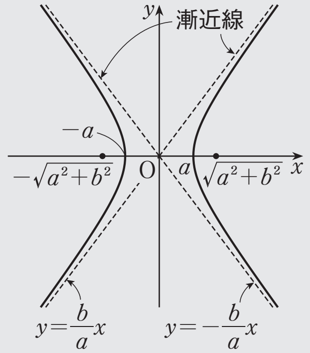
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$

の焦点は，

$(\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$，$(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$

漸近線は，

$y=\frac{b}{a}x$，$y=-\frac{b}{a}x$



2

[正解] ウ：②，エ：②

[解説]

$$5x^2-4y^2=-20$$

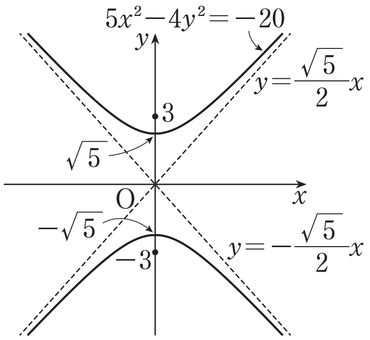
$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=-1$$

$$\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{5})^2}=-1$$

$\sqrt{4+5}=3$ より，焦点は，[B]

$$(0,\ 3),\ (0,\ -3)$$

漸近線は，$\boldsymbol{y=\frac{\sqrt{5}}{2}x,\ y=-\frac{\sqrt{5}}{2}x}$ [B]



［B］　双曲線

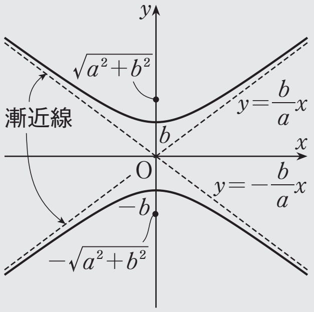
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\ (a>0,\ b>0)$

の焦点は，

$(0,\ \sqrt{a^2+b^2}),\ (0,\ -\sqrt{a^2+b^2})$

漸近線は，

$y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x$



3

[正解] オ：③

[解説]

焦点が x 軸上にあるので，求める方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0)$$

とおける。

焦点からの距離の差が 6 であるから，[C]

$$2a=6$$

$$a=3$$

焦点の座標の 1 つが (4，0) であるから，

$$\sqrt{a^2+b^2}=4$$ [D]

$$9+b^2=16$$

$$b^2=7$$

よって，求める方程式は，

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1}$$

[C]　双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$$

の焦点からの距離の差は $2a$ に等しい。

[D]　双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$$

の焦点は，

$(\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$，$(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$

4 **[正解]** カ：③

[解説]

焦点が y 軸上にあるので，求める方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \quad (a>0,\ b>0)$$

とおける。

焦点の座標の 1 つが $(0,\ 3)$ であるから，

$$\sqrt{a^2+b^2}=3 \quad \text{[E]}$$

$$a^2+b^2=9 \quad \cdots\cdots ①$$

漸近線の 1 つが $y=\sqrt{2}\,x$ であるから，

$$\frac{b}{a}=\sqrt{2} \quad \text{[F]}$$

$$b=\sqrt{2}\,a \quad \cdots\cdots ②$$

①，②より，$a^2+2a^2=9$

$$a^2=3$$

①より，$3+b^2=9$

$$b^2=6$$

よって，求める方程式は，

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=-1}$$

[E] 双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \ (a>0,\ b>0)$$

の焦点は，

$$(0,\ \sqrt{a^2+b^2}),\ (0,\ -\sqrt{a^2+b^2})$$

[F] 双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \ (a>0,\ b>0)$$

の漸近線は，

$$y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x$$